УДК 539.3

# Об общем локальном принципе для $C^*$-алгебр

© *2005 г.* ***Н.Л. Василевский***

We present a local principle based on the Dauns-Hofmann construction, which describes $C^*$-algebras in terms of continuous sections of $C^*$-bundles.

## 1 Введение

В пионерских работах И.Б. Симоненко [7, 8] впервые было введено понятие локально эквивалентных в точке операторов, на основании которого была разработана теория локазизации, позволившая успешно исследовать новые классы многомерных сингулярных интегральных операторов, в том числе и с разрывными символами, а также уравнений типа свертки в конусах [9]. Эта теория очень скоро получила название *локального принципа Симоненко.* В соответствии с традициями того времени, она была нацелена на изучение индивидуальных операторов и сводила изучение Фредгольмовых свойств к локальной обративости.

Не претендуя на полноту, укажем ряд последующих работ посвященным другим вариантам локального принципа [4, 6, 10, 11, 13, 14]. Не смотря на то, что многие из них формулируются для банаховых или $C^*$-алгебр, как правило, основной результат по прежнему состоит в сведении обратимости (Фредгольмовости) к локальной обратимости.

Упомянем также независимый цикл работ примерно того же времени, посвященный описанию алгебр и колец непрерывными сечениями [3, 12, 15, 16, 17, 18, 19].

Отметим особо, что значение локального принципа далеко не исчерпывается возможностью сведения обратимости (Фредгольмовости) к локальной обратимости. Здесь очень важна возможность глобального описания исходной алгебры операторов (или ее алгебры символов) в целом, исходя из описания ее локальных алгебр. Это тем более важно при исследовании различных некласических (разрывных) случаев, когда алгебра, порожденная начальными образующими, не сводится к совокупности всех образующих, а представляет собой гораздо более сложный объект.

В настоящей работе предлагается вариант локального принципа, дающий глобальное описание исследуемой алгебры в терминах непрерывных сечений некоторого *каноническим образом* построенного $C^*$-расслоения. Наш подход основан на общих конструкциях работ [12, 17] и результатах работы [19]. Отметим, что предлагаемый локальный принцип дает, в известном смысле, некую общую концепцию для целого ряда принципов, как известных и, в определенном смысле, "стандартных", так и "индивидуальных", учитывающих специфические свойства изучаемых алгебр.

Работа организована следующим образом. Во втором параграфе мы напоминаем определение $C^*$-расслоения. Следующие два параграфа посвящены описанию двух, в определенном смысле, противоположных *канонических* конструкций: построению $C^*$-алгебры по заданному $C^*$-расслоению и построению $C^*$-расслоения по заданной $C^*$-алгебре и некоторой системе ее идеалов. Локальный принцип обсуждается в пятом параграфе, а одному из наиболее важных его частных случаев - локальному принципу Дугласа-Варелы - посвящен шестой параграф. В последнем, седьмом, параграфе указаны некоторые примеры применения локального принципа.

## 2 $C^*$-расслоения

Начнем с необходимых определений.

*Расслоением* называется тройка $\xi = (p, E, T)$, где $E$ и $T$ - топологические пространства, а $p : E \longrightarrow T$ - непрерывное сюрьекривное отображение. Множество $T$ называется *базой* расслоения, а множество $\xi(t) = p^{-1}(t)$ называется *слоем над точкой* $t \in T$.

Пусть $V$ - открытое подмножество пространства $T$, функция $\sigma : V \longrightarrow E$ называется *локальным сечением* расслоения $\xi$, если $p(\sigma(t)) = t$ для всех $t \in V$ (или $\sigma(t) \in \xi(t)$ для всех $t \in V$). При $V = T$, сечение называется *глобальным* (или просто сечением).

Совокупность всех *непрерывных сечений* расслоения $\xi$ будем обозначать через $\Gamma(\xi)$. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только непрерывные сечения.

Введем

$$E \vee E = \{(x, y) \in E \times E : \ p(x) = p(y)\}.$$

Расслоение $\xi = (p, E, T)$ называется а $C^*$-*расслоением*, если каждый слой $\xi(t)$, $t \in T$, наделен структурой $C^*$-алгебры, и выполняются следующие свойства

1. функции

$$\begin{aligned} (x,y) \mapsto x+y &\quad : \quad E \vee E \to E \\ (x,y) \mapsto x \cdot y &\quad : \quad E \vee E \to E \\ (\alpha, x) \mapsto \alpha x &\quad : \quad \mathbb{C} \times E \to E \\ x \mapsto x^* &\quad : \quad E \to E \end{aligned}$$

непрерывны;

2. подмножества вида

$$U_V(\sigma, \varepsilon) = \{x \in E:\ p(x) \in V,\ \|x - \sigma(p(x))\| < \varepsilon\}$$

образуют базу открытых множеств пространства $E$. Здесь $V$ - открытое в $T$ множество, $\sigma$ - непрерывное сечение $\xi$ над $V$ и $\varepsilon > 0$,

При $V = T$ множество

$$U(\sigma, \varepsilon) = U_T(\sigma, \varepsilon) = \{x \in E : \|x - \sigma(p(x))\| < \varepsilon\},$$

называется *трубчатой окрестностью радиуса $\varepsilon$ сечения $\sigma$.*

Пусть $s$ - непрерывное сечение расслоения $\xi$, тогда множество

$$\begin{aligned} V &= s^{-1}(U(\sigma, \varepsilon)) \\ &= \{t \in T:\ \|s(t) - \sigma(t)\| < \varepsilon\} \\ &= \{t \in T:\ \|(s - \sigma)(t)\| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

открыто в $T$. И, таким образом, для каждого $a \in \Gamma(\xi)$ множество

$$V(a, \varepsilon) = \{t \in T:\ \|a(t)\| < \varepsilon\},$$

открыто в $T$.

Если каждая $C^*$-алгебра $\xi(t)$ имеет единицу $e(t)$ и сечение $e:\ t \to e(t)$ непрерывно, то расслоение $\xi$ называется $C^*$-расслоением с единицей.

## 3 $C^*$-алгебра, определяемая расслоением

Для каждого $C^*$-расслоения $\xi = (p, E, T)$ существует канонически определяемая $C^*$-алгебра, связанная с этим расслоением. А именно, как легко видеть, множество всех непрерывных ограниченных сечений $\sigma$ расслоения $\xi = (p, E, T)$, снабженное покомпонентными операциями и нормой

$$\|\sigma\| = \sup_{t \in T} \|\sigma(t)\|$$

является $C^*$-алгеброй.

Мы будем на обозначать эту алгебру через $\Gamma^b(\xi)$ и называть *$C^*$-алгеброй, определенной $C^*$-расслоением $\xi = (p, E, T)$.*

**Лемма 3.1.** *Для каждого сечения $\sigma \in \Gamma(\xi)$ финкция $\|\cdot\|:\ t \to \|\sigma(t)\|$ полунепрерывна сверху.*

*Proof.* Для доказательства леммы достаточно для каждой точки $t_0 \in T$ и любого положительного $\varepsilon$ найти окрестность $V$ точки $t_0$ такую, что

$$\|\sigma(t)\| < \|\sigma(t_0)\| + \varepsilon,$$

для всех что $t \in V$. Искомой окрестностью, как легко видеть, будет

$$V = V(\sigma, \|\sigma(t_0)\| + \varepsilon) = \{t \in T:\ \|\sigma(t)\| < \|\sigma(t_0)\| + \varepsilon\}.$$

□

Множество $C^b(T)$ всех непрерывных ограниченных функций на $T$ образуют, очевидным образом, $C^*$-алгебру относительно поточечных операций и супремум нормы.

**Лемма 3.2.** *Алгебра $\Gamma^b(\xi)$ является $C^b(T)$-модулем.*

*Proof.* Мы докажем только, что для каждого сечения $\sigma \in \Gamma^b(\xi)$ и каждой функции $a \in C^b(T)$ их произведение $a\sigma$ принадлежит $\Gamma^b(\xi)$, где $(a\sigma)(t) = a(t)\sigma(t)$, для всех $t \in T$.

Зафиксируем $\sigma$ и $a$, и докажем непрерывность сечения $a\sigma$ в любой точке $t_0 \in T$. Пусть $M = \|\sigma\| = \sup_t \|\sigma(t)\|$. Покажем, что для любого множества $U_V(s, \varepsilon)$, входящего в базу топологии на $E$, и такого, что $(a\sigma)(t_0) \in U_V(s, \varepsilon)$, существует открытое множество $V_0 (\subset T)$, содержащее точку $t_0$, такое, что $(a\sigma)(t) \in U_V(s, \varepsilon)$, для всех $t \in V_0$.

Поскольку $(a\sigma)(t_0) \in U_V(s, \varepsilon)$, то $t_0 \in V$ и $\varepsilon_0 = \|a(t_0)\sigma(t_0) - s(t_0)\| < \varepsilon$. Пусть $\delta = (\varepsilon - \varepsilon_0)$. Введем следующие открытые множества

$$\begin{aligned} V_1 &= \{t \in T:\ |a(t) - a(t_0)| < \frac{\delta}{3M}\}, \\ V_2 &= V(a(t_0)\sigma - s, \varepsilon_0 + \frac{\delta}{3}) \\ &= \{t \in T:\ \|a(t_0)\sigma(t) - s(t)\| < \varepsilon_0 + \frac{\delta}{3}\}. \end{aligned}$$

Тогда множество $V_0 = V \cap V_1 \cap V_2$ открыто в $T$ и содержит точку $t_0$. Более того, для произвольного $t \in V_0$ имеем

$$\begin{aligned} & \|a(t)\sigma(t) - s(t)\| \\ \leq\ & \|a(t)\sigma(t) - a(t_0)\sigma(t)\| + \|a(t_0)\sigma(t) - s(t)\| \\ \leq\ & |a(t) - a(t_0)| \cdot \|\sigma(t)\| + \|a(t_0)\sigma(t) - s(t)\| \\ <\ & \frac{\delta}{3M} \cdot M + \varepsilon_0 + \frac{\delta}{3} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно $a(t)\sigma(t) \in U_V(s, \varepsilon)$, для всех $t \in V_0$. □

**Лемма 3.3.** *Если пространство $T$ - квазикомпактно, то $\Gamma^b(\xi) = \Gamma(\xi)$ и $C^b(T) = C(T)$.*

*Proof.* Ограничимся доказательством только первого утверждения. Пусть $\sigma \in \Gamma(\xi)$. Каждое множество $V_n = V(\sigma, n) = \{t \in T : \|\sigma(t)\| < n\}$ открыто в $T$, а система $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ образует покрытие $T$. Тогда из квазикомпактности $T$ следует ограниченность $\|\sigma(t)\|$, и, таким образом, $\sigma \in \Gamma^b(\xi)$. □

Напомним, что топологическое пространство $T$ называется *квази-вполне регулярным*, если для каждой точки $t_0 \in T$ и любого замкнутого множества $Y (\subset T)$, не содержащего $t_0$, существует непрерывная функция $f : T \to [0,1]$ такая, что

$$f(t_0) = 0, \qquad f|_Y \equiv 1.$$

Следующая теорема является аналогом теоремы Стоуна-Вейерштрасса для $C^*$-расслоений.

**Теорема 3.4.** *Пусть $\xi = (p, E, T)$ - $C^*$-расслоение над квазикомпактным квази-вполне регулярным пространством $T$. И пусть $\mathcal{A}$ - замкнутый $C(T)$-подмодуль $\Gamma(\xi)$ $(= \Gamma^b(\xi))$ такой, что для всех $t \in T$ множество $\mathcal{A}(t) = \{a(t) : a \in \mathcal{A}\}$ плотно в слое $\xi(t) = p^{-1}(t)$. Тогда $\mathcal{A} = \Gamma(\xi)$.*

*Proof.* Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого сечения $\sigma \in \Gamma(\xi)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $a \in \mathcal{A}$ такой, что

$$\|\sigma - a\| = \sup_{t\in T} \|\sigma(t) - a(t)\| < \varepsilon.$$

Зафиксируем $\sigma$ и $\varepsilon$. Далее, для каждой точки $t_0 \in T$ найдем элемент $a_{t_0} \in \mathcal{A}$ такой, что $\|\sigma(t_0) - a_{t_0}(t_0)\| < \varepsilon$. Отметим, что множество

$$V'_{t_0} = V(\sigma - a_{t_0}, \varepsilon) = \{t \in T : \|\sigma(t) - a_{t_0}(t)\| < \varepsilon\}$$

открыто в $T$ и содержит точку $t_0$.

Пользуясь квази-вполне регулярностью, для точки $t_0$ и замкнутого множества $Y_{t_0} = T \setminus V'_{t_0}$ найдем непрерывную на $T$ функцию $f_{t_0} : T \to [0,1]$ такую, что

$$f_{t_0}(t_0) = 1, \qquad f_{t_0}|_{Y_{t_0}} \equiv 0.$$

Множество

$$V_{t_0} = \{t \in T : f_{t_0}(t) > 0\},$$

очевидным образом, открыто и содержит точку $t_0$. Далее, из покрытия $\{V_t\}_{t\in T}$ выбираем конечное подпокрытие, пусть $\{V_{t_k}\}_{k=1}^n$. Введем функции

$$\psi_k = \frac{f_{t_k}}{\sum_{j=1}^n f_{t_j}}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Отметим, что все функции $\psi_k : T \to [0,1]$ непрерывны и $\sum_{k=1}^n \psi_k \equiv 1$. Кроме того, как легко видеть,

$$\|\psi_k(t)\sigma(t) - \psi_k(t)a_{t_k}(t)\| = \psi(t)\|\sigma(t) - a_{t_k}(t)\| < \psi_k(t)\varepsilon,$$

для всех $t \in T$. Для завершения доказательства заметим, что элемент $a = \sum_{k=1}^n \psi_k a_{t_k}$ принадлежит $\mathcal{A}$ и

$$\begin{aligned}
\|\sigma - a\| &= \sup_{t\in T} \|\sum_{k=1}^n \psi_k(t)(\sigma(t) - a_{t_k}(t))\| \\
&\leq \sup_{t\in T} \sum_{k=1}^n \|\psi_k(t)(\sigma(t) - a_{t_k}(t))\| \\
&= \sup_{t\in T} \sum_{k=1}^n \psi_k(t)\|\sigma(t) - a_{t_k}(t)\| \\
&< \sup_{t\in T} \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \cdot \varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

# 4 $C^*$-расслоение, определенное $C^*$-алгеброй и некоторой системой ее идеалов

Пусть заданы некоторая $C^*$-алгебра $\mathcal{A}$ и некоторая система ее замкнутых двусторонних идеалов $J_T = \{J(t) : t \in T\}$, параметризованная точками некоторого множества $T$. Приведем каноническую процедуру построения $C^*$-расслоения исходя из вышеприведенных данных.

Для каждой точки $t \in T$ введем фактор алгебру $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}/J(t)$. Через $a(t)$ мы будем обозначать образ элемента $a \in \mathcal{A}$ в $\mathcal{A}(t)$. Введем непересекающееся объединение $C^*$-алгебр $\mathcal{A}(t)$

$$E = \bigsqcup_{t\in T} \mathcal{A}(t).$$

На множестве $E$ естественным образом действует аддитивная группа $\mathcal{A}$: каждый элемент $a \in \mathcal{A}$ порождает отображение

$$g_a : E \to E,$$

заданное правилом

$$g_a : x(t) \longmapsto (x + a)(t).$$

При этом, как легко видеть, орбита каждой точки $x = x(t)$ $(\in \mathcal{A}(t))$, под действием группы $\mathcal{A}$, совпадает с фактор алгеброй $\mathcal{A}(t)$, а множество всех орбит параметризуется точками множества $T$. Разбиение множества $E$ на непересекающиеся орбиты порождает проекцию

$$p : x(t) \in E \longmapsto t \in T,$$

причем $p^{-1}(t) = \mathcal{A}(t)$.

Введем теперь на множествах $E$ и $T$ топологии, превращающие тройку $\xi = (p, E, T)$ в расслоение. Каждый элемент $a \in \mathcal{A}$ порождает сечение $\tilde{a}: T \to E$ по правилу

$$\tilde{a}: t \longmapsto a(t).$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$ множество всех таких сечений. Для любого $\varepsilon > 0$ и любого сечения $\tilde{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ введем множество

$$U(\tilde{a}, \varepsilon) = \{x \in E : \|x - \tilde{a}(p(x))\| < \varepsilon\}.$$

Снабдим множество $E$ топологией, предбаза которой состоит из всех множеств типа $U(\tilde{a}, \varepsilon)$.

**Замечание 4.1.** Топология каждого слоя $\xi(t) = \mathcal{A}(t)$, порожденная фактор нормой $\|x(t)\| = \inf_{z \in J(t)} \|x + z\|$, совпадает с топологией слоя $\xi(t)$, порожденной сужением на $\xi(t)$ топологии пространства $E$.

Снабдим теперь базу $T$ расслоения $\xi = (p, E, T)$ топологией пространства орбит, или фактор топологией: *сильнейшей* из топологий, при которых проекция $p: E \to T$ непрерывна.

**Лемма 4.2.** *1. Отображение $p : E \to T$ - открытое.*

*2. Введенная на $T$ топология совпадает со* слабейшей *из топологий, относительно которых все отображения $\tilde{a} \in \widetilde{A}$ непрерывны.*

*3. Предбаза топологии на $T$ задается системой множеств вида*

$$V(\tilde{a}, \varepsilon) = \{t \in T : \|\tilde{a}(t)\| < \varepsilon\}.$$

*Proof.* Для каждого $a \in \mathcal{A}$ отображение

$$g_a : x(t) \longmapsto (x + a)(t)$$

множества $E$ на себя взаимнооднозначно и $g_a^{-1} = g_{-a}$. Далее

$$\begin{aligned}
g_a^{-1}(U(\tilde{b}, \varepsilon)) &= g_{-a}(U(\tilde{b}, \varepsilon)) \\
&= \{x \in E : \|x + a(p(x)) - \tilde{b}(p(x))\| < \varepsilon\} \\
&= U(\widetilde{(b - a)}, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Таким образом каждое отображение $g_a$ является гомеоморфизмом пространства $E$. Покажем теперь, что отображение $p : E \to T$ - открытое. Пусть $U$ - открытое в $E$ множество, нужно доказать, что множество $V = p(U)$ открыто в $T$. Поскольку $V = p(p^{-1}(V))$, то в силу определения фактор топологии достаточно доказать, что множество $p^{-1}(V)$ открыто. Из представления

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} g_a(U),$$

следует, что множество $p^{-1}(V)$ - открытое. Таким образом первое утверждение леммы доказано.

Далее, поскольку отображение $p : E \to T$ открыто, то предбаза топологии на $T$ может быть описана, как образ при отображении $p$ предбазы открытых в $E$ множеств. В качестве предбазы топологии на $E$ возьмем систему всех множеств вида

$$\begin{aligned}
U &= U(\tilde{a}, \varepsilon_1) \cap U(\tilde{b}, \varepsilon_2) \\
&= \{x \in E : \|x - \tilde{a}(p(x))\| < \varepsilon_1, \\
&\qquad \|x - \tilde{b}(p(x))\| < \varepsilon_2\},
\end{aligned}$$

где $a$ и $b$ - произвольные элементы из $\mathcal{A}$, а $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ - произвольные положительные числа.

Тогда предбаза топологии в $T$ состоит из множеств вида

$$\begin{aligned}
V = p(U) &= \{t \in T : \|\tilde{a}(t) - \tilde{b}(t)\| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2\} \\
&= \{t \in T : \|(a - b)(t)\| < \varepsilon\} \\
&= V(\widetilde{a - b}, \varepsilon),
\end{aligned}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Далее, предбаза слабейшей из топологий, для которых непрерывны все сечения $\tilde{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ описывается следующим образом. Для любого сечения $\tilde{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$ и любого открытого множества $U$ из некоторой предбазы топологии на $E$ множество $\tilde{a}^{-1}(U)$ должно быть открыто. Выберем $U = U(\tilde{b}, \varepsilon)$, тогда

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{-1}(U) &= p(U \cap \tilde{a}(T)) \\
&= \{t \in T : \|\tilde{a}(t) - \tilde{b}(t)\| < \varepsilon\} \\
&= \{t \in T : \|(a - b)(t)\| < \varepsilon\} \\
&= V(\widetilde{a - b}, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Таким образом второе утверждение леммы доказано.

Для доказательства третьего утверждения достаточно в описанной выше предбазе на $T$ заменить элемент $a - b \in \mathcal{A}$ на элемент $a \in \mathcal{A}$. $\square$

Введенная на $T$ топология называется $*$-*расслоенной топологией.*

**Лемма 4.3.** *Описанное расслоение $\xi = (p, E, T)$ является $C^*$-расслоением.*

*Proof.* Ограничимся доказательством только второго свойства в определении $C^*$-расслоения. Для этого достаточно проверить, что каждая точка множества

$$U_V(s, \varepsilon) = \{x \in E : p(x) \in V \text{ and } \|x - s(p(x))\| < \varepsilon\}$$

является внутренней. Здесь $V$ - открытое множество в $T$, $\varepsilon > 0$, а $s$ - непрерывное сечение над $V$.

Пусть $x_0 \in U_V(s,\varepsilon)$, покажем, что точка $x_0$ - внутренняя. Пусть $t_0 = p(x_0)$, $s_0 = s(t_0)$, $\sigma_0 = \frac{1}{2}(s_0 + x_0)$, $\delta = \|x_0 - s_0\| < \varepsilon$ и $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(\delta + \frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)) < \frac{1}{2} \cdot \varepsilon$. Обозначим через $\sigma$ произвольный элемент алгебры $\mathcal{A}$ такой, что $\sigma(t_0) = \sigma_0$ $(\in \mathcal{A}(t_0))$. Рассмотрим открытое множество $U = U(\tilde{\sigma}, \varepsilon_0)$. Как легко видеть, обе точки $x_0$ и $s_0$ принадлежат $U$. Из непрерывности сечения $s$ вытекает, что множество

$$V_0 = s^{-1}(U) = p(U \cap s(V))$$

открыто, кроме того $V_0 \subset V$. Проекция $p: E \to T$ непрерывна, а значит множество $p^{-1}(V_0)$ открыто в $E$. А тогда открыто и следующее иножество

$$U_0 = U(\tilde{\sigma}, \varepsilon_0) \cap p^{-1}(V_0).$$

Как легко видеть,

$$x_0 \in U_0 \subset U_V(s,\varepsilon),$$

и, таким образом, точка $x_0$ - внутренняя. □

Описанное выше $C^*$-расслоение $\xi = (p, E, T)$ называется *каноническим $C^*$-расслоением, определенным $C^*$-алгеброй $\mathcal{A}$ и системой ее замкнутых двусторонних идеалов $J_T = \{J(t): t \in T\}$.*

## 5 Общий локальный принцип

Следующая теорема является одним из вариантов обобщения на (некоммутативные) $C^*$-алгебры представления Гельфанда коммутативных банаховых алгебр.

**Теорема 5.1.** *Пусть $\mathcal{A}$ - $C^*$-алгебра и $J_T = \{J(t): t \in T\}$ - некоторая система ее замкнутых двусторонних идеалов. Далее, пусть $\xi = (p, E, T)$ - каноническое $C^*$-расслоение, определенное $\mathcal{A}$ и $J_T$, и пусть $\Gamma^b(\xi)$ - $C^*$-алгебра, определенная расслоением $\xi = (p, E, T)$. Тогда отображение*

$$\tilde{\pi}: a \in \mathcal{A} \longmapsto \tilde{a} \in \Gamma^b(\xi)$$

*является морфизмом $C^*$-алгебр $\mathcal{A}$ и $\Gamma^b(\xi)$ таким, что*

1. $\ker \tilde{\pi} = \bigcap_{t \in T} J(t)$,
2. $\operatorname{Im} \tilde{\pi} = \widetilde{\mathcal{A}}$.

*В частности, отображение $\tilde{\pi}: \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ является изометрическим $^*$-изоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}.$$

*Proof.* Действительно, $\tilde{\pi}(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a(t) = 0$ для всех $t \in T$, что эквивалентно тому, что $a \in J(t)$ для всех $t \in T$, или $a \in \bigcap_{t \in T} J(t)$. Для завершения доказательства воспользуемся результатом о каноническом разложении морфизмов $C^*$-алгебр, см., например, [5], пункт 1.8.3. □

Конструкция $C^*$-расслоения, определенного $C^*$-алгеброй $\mathcal{A}$ и системой ее идеалов $J_T$, совместно с теоремой 5.1 дают, по существу, общую концепцию локальных принципов в теории $C^*$-алгебр, как способ изоморфного описания $C^*$-алгебры $\mathcal{A}$ (или $\mathcal{A}/_{\bigcap_{t \in T} J(t)}$) на основании информации о "более простых объектах", так называемых локальных алгебрах.

Случай, когда $\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}$, является наиболее важным, поскольку здесь мы получаем изоморфное описание исходной алгебры $\mathcal{A}$. При изучении представлений операторной алгебры $\mathcal{A}$, содержащей идеал $\mathcal{K}$ компактных операторов, либо при изучении Фредгольмовых свойств операторов из $\mathcal{A}$, важным является случай, когда $\bigcap_{t \in T} J(t) = \mathcal{K}$. Здесь мы даем изоморфное описание алгебры Калкина, или алгебры (Фредгольмовых) символов, $\operatorname{Sym} \mathcal{A} = \mathcal{A}/\mathcal{K}$ исходной алгебры $\mathcal{A}$.

*В дальнейшем мы будет рассматривать только эти два наиболее важные для нас случая.*

Пусть заданы $C^*$-алгебра $\mathcal{A}$ и некоторая система ее замкнутых двусторонних идеалов $J_T$, параметризованных точками множества $T$. В этом случае мы говорим, что будем *локализовать алгебру $\mathcal{A}$ по точкам множества $T$*. Элементы $a_1$ и $a_2$ алгебры $\mathcal{A}$ называются *локально эквивалентными в точке $t \in T$* ($a_1 \overset{t}{\sim} a_2$), если $a_1 - a_2 \in J(t)$. Естественная проекция $\pi_t: \mathcal{A} \to \mathcal{A}(t)$ отождествляет все локально эквивалентные в точке $t$ элементы алгебры $\mathcal{A}$, а фактор алгебра $\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}/J(t)$ называется *локальной алгеброй в точке $t \in T$*. Для элемента $a \in \mathcal{A}$ его проекция $\pi_t(a) = a(t)$ в фактор алгебре $\mathcal{A}(t)$ называется иногда *локальным представителем $a$* в локальной алгебре $\mathcal{A}(t)$.

При этом:

1. Интересующая нас алгебра ($\mathcal{A}$, если $\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}$, или $\operatorname{Sym} \mathcal{A}$, если $\bigcap_{t \in T} J(t) = \mathcal{K}$) описывается по своим локальным алгебрам *канонической конструкцией*: как алгебра непрерывных сечений канонически определенного $C^*$-расслоения над $T$.
2. Норма каждого элемента описываемой алгебры ($\mathcal{A}$ или $\operatorname{Sym} \mathcal{A}$) равна супремуму норм всех его локальных представителей: $\sup_{t \in T} \|a(t)\|$.

Для исходной $C^*$-алгебры $\mathcal{A}$ каждый конкретный выбор системы $J_T$ ее идеалов (со свойством, скажем, $\bigcap_{t \in T} J(t) = \{0\}$) определяет свою специфическую версию локального принципа со своим специфическим локализующим множеством $T$. Вместе с тем есть несколько стандартных случаев, когда можно утверждать *априори*, что $\bigcap_{t\in T} J(t) = \{0\}$. Одим из наиболее распространенных таких случаев является, так называемый, локальный принцип Дугласа-Варелы. Мы рассмотрим его подробно в следующем параграфе.

Вопреки достаточно широко распространенному мнению, отметим

**Замечание 5.2.** Невозможность непосредственного применения какого либо из стандартных локальных принципов (например локального принципа Дугласа-Варелы) не исключает, вообще говоря, процедуру локализации. Используя специфические свойства рассматриваемой $C^*$-алгебры $\mathcal{A}$, зачастую можно "вручную" построить необходимую для локализации систему идеалов $J_T$.

Другим распространенным стандартным случаем является система идеалов $J_T = \operatorname{Prim}\mathcal{A}$, состоящая из всех примитивных идеалов изучаемой $C^*$-алгебры $\mathcal{A}$. Как хорошо известно,

$$\bigcap_{\operatorname{Prim}\mathcal{A}} P_t = \{0\}.$$

В этом случае каждая локальная алгебра неприводима, и мы имеем, в определенном смысле, наиболее "подробную" локализацию. Исходная $C^*$-алгебра $\mathcal{A}$ описывается как алгебра непрерывных сечений над пространством $T = \operatorname{Prim}\mathcal{A}$, снабженным $^*$-расслоенной топологией.

Вместе с тем этот случай имеет, по сравнению с локальным принципом Дугласа-Варелы (в условиях применимости обоих принципов), ряд существенных недостатков:

- $^*$-расслоенная топология на $T$, вообще говоря, не совпадает с топологией Джекобсона на $T = \operatorname{Prim}\mathcal{A}$. Последняя топология слабее;
- алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}$, изоморфная и изометричная исходной алгебре $\mathcal{A}$, является, вообще говоря, собственной подалгеброй алгебры $\Gamma^b(\xi)$;
- если пространство $T = \operatorname{Prim}\mathcal{A}$ снабдить топологией Джекобсона, то не все отображения

  $$\tilde{a}:\ t \longmapsto a(t)$$

  из $\widetilde{\mathcal{A}}$ уже обязательно непрерывны.

Соответствующий пример приведен, например, в [12], Пример 9.1.

## 6 Локальный принцип Дугласа-Варелы

Пусть $\mathcal{A}$ - $C^*$-алгебра с единицей $e$, и пусть $\mathcal{Z}$ - ее некоторая *центральная* коммутативная $C^*$-подалгебра, содержащая $e$. Обозначим через $T$ компакт максимальнвх идеалов алгебры $\mathcal{Z}$, тогда, разумеется, имеем $\mathcal{Z} \cong C(T)$. Далее, для каждой точкм $t \in T$ обозначим через $J_t$ максимальный идеал алгебры $\mathcal{Z}$, соответствующий точке $t$, и обозначим через $J(t) = \mathcal{A}\cdot J_t$ замкнутый двусторонний идеал во всей алгебре $\mathcal{A}$, порожденный $J_t$. Введем, наконец, систему идеалов $J_T = \{J(t):\ t \in T\}$.

**Лемма 6.1.** *Имеет место равенство*

$$\bigcap_{t\in T} J(t) = \{0\}.$$

*Proof.* Пусть $P \in \operatorname{Prim}\mathcal{A}$ - любой примитивный идеал алгебры $\mathcal{A}$. Покажем, что для некоторой точки $t \in T$ имеет место равенство $P \cap \mathcal{Z} = J_t$. Действительно, пусть $\pi$ - неприводимое представление алгебры $\mathcal{A}$ с ядром $\ker\pi = P$, тогда

$$\mathbb{C}\cdot I \subset \pi(\mathcal{Z}) \subset \pi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}\cdot I.$$

Следовательно

$$\mathbb{C} \cong \pi(\mathcal{Z}) = (\mathcal{Z}+P)/P \cong \mathcal{Z}/(\mathcal{Z}\cap P),$$

и значит $\mathcal{Z}\cap P$ - некоторый максимальный идеал алгебры $\mathcal{Z}$, который совпадает с $J_t$ для некоторой точки $t \in T$. Как легко видеть, условия $P\cap\mathcal{Z} = J_t$ и $P \supset J(t)$ эквивалентны для каждого примитивного идеала $P$. Далее, по [5], пункт 2.9.7, имеем

$$J(t) = \bigcap_{P\supset J(t)} P.$$

Следовательно

$$\{0\} \subset \bigcap_{t\in T} J(t) \subset \bigcap_{\operatorname{Prim}\mathcal{A}} P = \{0\},$$

или

$$\bigcap_{t\in T} J(t) = \{0\}.$$

□

Введем теперь $C^*$-расслоение $\xi = (p, E, T)$, определенное алгеброй $\mathcal{A}$ и вышеописанной системой идеалов $J_T = \{J(t)\ :\ t \in T\}$. Тогда пространство $T$ имеет две естественные топологии:

- $^*$-расслоенную топологию расслоения $\xi$,
- топологию пространства максимальных идеалов алгебры $\mathcal{Z}$, или, что тоже самое, ядерно-оболочную топологию $C^*$-алгебры $\mathcal{Z}$.

Наша следующая цель - сравнить эти топологии. Для некоторой точки $t \in T$, пусть $u_0$ и $u_1$ - две окрестности точки $t$ в ядерно-оболочной топологии на $T$ такие, что $t \in u_1 \subset \overline{u}_1 \subset u_0$. Тогда по теореме Титса существуют функции $f: T \to [0,1]$, обладающие свойством

$$f|_{u_1} \equiv 1, \quad f|_{T \setminus u_0} \equiv 0.$$

Обозначим через $F_t$ множество таких функций $f$ для всех пар окрестностей $(u_0, u_1)$ с вышеуказанными свойствами.

**Лемма 6.2.** *Для каждого элемента $a \in \mathcal{A}$ и каждой точки $t \in T$, отождествляя $\mathcal{Z}$ с $C(T)$, имеем*

$$\|a(t)\| = \|\tilde{a}(t)\| = \inf_{f \in F_t} \|f \cdot a\|.$$

*Proof.* Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $x \in J(t)$ удовлетворяет условию

$$\|a + x\| < \|a(t)\| + \varepsilon.$$

Выберем теперь элементы $y_k \in J_t$ и $b_k \in \mathcal{A}$, $k = \overline{1,n}$, такие, что

$$\|x - (y_1 b_1 + ... + y_n b_n)\| < \varepsilon.$$

Выберем, кроме того, функцию $f \in F_t$, удовлетворяющую условию

$$\|f(y_1 b_1 + ... + y_n b_n)\| < \varepsilon.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|a(t)\| + \varepsilon &> \|a + x\| \geq \|fa + fx\| \\
&\geq \|fa + f(y_1 b_1 + ... + y_n b_n)\| \\
&\quad - \|f(y_1 b_1 + ... + y_n b_n) - fx\| \\
&\geq \|fa\| - \|f(y_1 b_1 + ... + y_n b_n)\| \\
&\quad - \|(y_1 b_1 + ... + y_n b_n) - x\| \\
&\geq \|fa\| - 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\|fa\| \leq \|a(t)\| + 3\varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\inf_{f \in F_t} \|fa\| \leq \|a(t)\|.$$

Обратно, рассмотрим $fa = a + (f-1)a$, где $(f-1)a \in J(t)$. Тогда

$$\|a(t)\| \leq \inf_{f \in F_t} \|fa\|.$$

□

**Следствие 6.3.** *Два элемента $a_1$ и $a_2$ алгебры $\mathcal{A}$ локально эквивалентны в точке $t \in T$: $a_1 \overset{t}{\sim} a_2$, тогда и только тогда, когда*

$$\inf_{f \in F_t} \|f(a_1 - a_2)\| = 0.$$

**Замечание 6.4.** При других подходах к локальному принципу утверждение следствия 6.3 часто используется в качестве определения локально эквивалентных элементов. В частности именно так вводятся локально эквивалентные элементы в локальном принципе Гохберга-Крупника [4], Глава XII, который формулируется в терминах, так называемой, покрывающей системы локализующих классов.

**Лемма 6.5.** *Две заданные на $T$ топологии, $^*$-расслоенная и ядерно-оболочечная, совпадают.*

*Proof.* Докажем вначале, что множество

$$V = V(\tilde{a}, \varepsilon) = \{t \in T: \ \|a(t)\| < \varepsilon\}$$

открыто в ядерно-оболочной топологии. Покажем для этого, что каждая точка $t_0 \in V$ - внутренняя. По лемме 6.2, существуют функция $f \in F_{t_0}$ и окрестности $u_1 \subset u_0$ $(\overline{u}_1 \subset u_0)$ такие, что $f|_{u_1} \equiv 1$ и $\|fa\| < \varepsilon$. Тогда для каждой точки $t \in \operatorname{Int} u_1$ имеем

$$\|a(t)\| \leq \|fa\| < \varepsilon,$$

значит $t_0 \in \operatorname{Int} u_1 \subset V$, и, таким образом, точка $t_0$ - внутренняя. Отсюда следует, что $^*$-расслоенная топология не сильнее ядерно-оболочной.

Напомним, что $^*$-расслоенная топология является слабейшей из топологий, для которых все сечения $\tilde{a}: \ t \mapsto a(t)$, $a \in \mathcal{A}$, непрерывны. В тоже время, ядерно-оболочная топология является слабейшей из топологий, для которых непрерывны все сечения вида $\tilde{b}: \ t \mapsto b(t)e(t)$, $b \in C(T)$. Таким образом, ядерно-оболочная топология не сильнее $^*$-расслоенной. □

**Теорема 6.6** (Локальный принцип Дугласа-Варелы)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ - некоторая $C^*$-алгебра с единицей, $\mathcal{Z}$ - некоторая ее центральная коммутативная $C^*$-подалгебра, содержащая единицу, $T$ - компакт максимальных идеалов алгебры $\mathcal{Z}$. Далее, пусть $J_t$ - максимальный идеал в $\mathcal{Z}$, соответсвующий точке $t \in T$, а $J(t) = J_t \cdot \mathcal{A}$ - замкнутый двусторонний идеал алгебры $\mathcal{A}$, порожденный $J_t$.*

*Тогда алгебра $\mathcal{A}$ $^*$-изоморфна и изометрична алгебре* всех *(глобальных) непрерывных сечений канонического $C^*$-расслоения, определенного алгеброй $\mathcal{A}$ и системой идеалов $J_T = \{J(t); \ t \in T\}$. Более того, $^*$-расслоенная топология на $T$ совпадает с ядерно-оболочной топологией компакта $T$.*

*Proof.* Действительно, по лемме 6.1, имеем

$$\bigcap_{t\in T} J(t) = \{0\},$$

и тогда по теореме 5.1 алгебра $\mathcal{A}$ $^*$-изоморфна и изометрична $C^*$-алгебре $\widetilde{\mathcal{A}}$, что, в частности, означает, что алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}$ замкнута.

Далее, для каждого $b(t) \in C(T)$ и единицы $\tilde{e} = e(t)$ алгебры $\widetilde{\mathcal{A}}$, существует элемент $b \in \mathcal{Z}$ такой,что $\tilde{b} = b\tilde{e}$, а тогда для всех $\tilde{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$, имеем

$$b\tilde{a} = b\tilde{e}\tilde{a} = \tilde{b}\tilde{a} = \widetilde{ba} \in \widetilde{\mathcal{A}}.$$

Таким образом алгебра $\widetilde{\mathcal{A}}$ - замкнутый $C(T)$-модуль. Применение теоремы 3.4 завершает доказательство теоремы. ☐

Следующая теорема описывает все неприводимые представления алгебры $\mathcal{A}$ в терминах неприводимых представлений ее локальных алгебр.

**Теорема 6.7.** *Пусть $\mathcal{A}$ - некоторая $C^*$-алгебра с единицей, $\mathcal{Z}$ - некоторая ее центральная подалгебра, содержашая единицу, и пусть $T$ - компакт максимальных идеалов алгебры $\mathcal{Z}$. Введем $C^*$-расслоение $\xi = (p, E, T)$, определенное алгеброй $\mathcal{A}$ и системой идеалов $J_T$. Для каждой точки $t \in T$ и каждого неприводимого представления $\pi \in \widehat{\mathcal{A}}(t)$ введем (неприводимое) представление*

$$\rho_\pi : \; a \longmapsto a(t) \longmapsto \pi(a(t))$$

*исходной $C^*$-алгебры $\mathcal{A}$.*

*Тогда отображение $\pi \longmapsto \rho_\pi$ отождествляет $\bigcup_{t\in T} \widehat{\mathcal{A}}(t)$ со спектром $\widehat{\mathcal{A}}$ алгебры $\mathcal{A}$.*

*Proof.* Для двух различных точек $t_1$ и $t_2$ множества $T$ рассмотрим неприводимые представления $\pi_1$ and $\pi_2$ соответствующих локальных алгебр $\mathcal{A}(t_1)$ и $\mathcal{A}(t_2)$. Покажем, что представления $\rho_{\pi_1}$ и $\rho_{\pi_2}$ исходной $C^*$-алгебры $\mathcal{A}$ не являются унитарно эквивалентными.

Выберем элемент $a \in \mathcal{A}$ со свойством $\pi_1(a(t_1)) \neq 0$, и функцию $b(t) \in C(T)$ такую, что $b(t_1) = 1$ и $b(t_2) = 0$. Тогда $ba \in \mathcal{A}$ и для представлений $\rho_{\pi_1}$ и $\rho_{\pi_2}$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_{\pi_1}(ba) &= \pi_1(b(t_1)a(t_1)) \neq 0, \\ \rho_{\pi_2}(ba) &= \pi_2(b(t_2)a(t_2)) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом представления $\rho_{\pi_1}$ и $\rho_{\pi_2}$ не эквивалентны, а, следовательно, отображение $\pi \mapsto \rho_\pi$ - инъективно.

Докажем теперь, что это отображение сюрьективно, или, иными словами, что для каждого представления $\rho \in \widehat{\mathcal{A}}$ существуют точка $t \in T$ и представление $\pi$ алгебры $\mathcal{A}(t)$ такие, что $\rho = \rho_\pi$. Для этого, как легко видеть, достаточно найти точку $t \in T$ такую, что $J(t) \subset \ker\rho$. Как было показано при доказательстве леммы 6.1, для каждого примитивного идеала (а значит и для $P = \ker\rho$) сужествует точка $t \in T$ такая, что $P \cap \mathcal{Z} = J_t$. А тогда для этой точки $t$ имеем $J(t) \subset P = \ker\rho$. ☐

## 7 Примеры использования

Приведем в этом параграфе ссылки на некоторые типичные примеры использования описанного локального принципа, как в его стандартной ситуации, так и в двух его "индивидуальных" вариантах.

Начнем со случаев, когда в алгебре Калкина (алгебре символов) существует нетривиальный центр, а значит можно использовать локальный принцип Дугласа-Варелы.

Пример 7.1. В работе [1] изучалась алгебра, порожденная всеми действующими в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторами вида $A = a(x)F^{-1}m(\xi)F$, где функция $a$ принадлежит некоторой алгебре разрывных в $\mathbb{R}^n$ функций, содержащей $C(\dot{\mathbb{R}}^n)$, $F$ и $F^{-1}$ - прямое и обратное преобразования Фурье, а $m(\xi)$ - однородная степени нуль функция в $\mathbb{R}^n$, сужение которой на единичную сферу непрерывно.

В этом случае, как легко видеть, образ алгебры $C(\dot{\mathbb{R}}^n)$ в алгебре Калкина образует центральную коммутативную подалгебру в алгебре Калкина, и поэтому для описания последней в работе [1] использовался локальный принцип Дугласа-Варелы. Локализация, естественным образом, проводилась по точкам $\dot{\mathbb{R}}^n$.

Пример 7.2. В работе [2] изучалась алгебра, порожденная всеми действующими в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$ операторами вида $A = a(x)F^{-1}b(\xi)F$, где $a \in C(\dot{\mathbb{R}}^2)$, $F$ и $F^{-1}$ - прямое и обратное преобразования Фурье, а $b(\xi)$ - однородная степени нуль функция в $\mathbb{R}^2$, сужение которой на единичную окружность кусочно-непрерывно.

В этом случае, как легко видеть, образ в алгебре Калкина алгебры, состояшей из классических двумерных сингулярных операторов (сверток) $F^{-1}b(\xi)F$, для которых сужение $b$ на единичную окружность непрерывно, образует центральную коммутативную подалгебру в алгебре Калкина, компактом максимальных идеалов которой является единичная окружность в двойственном пространстве. Поэтому в работе [2] использовался локальный принцип Дугласа-Варелы с локализацией по точкам этой единичной окружности.

В следующих двух примерах используя специфику рассматриваемых алгебр удается построить систему идеалов $J_T$ с нужными для локализации свойствами.

Пример 7.3. Пусть $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ - две $C^*$-алгебры (с единицей) линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельных гильбертовых пространствах $H_1$ и $H_2$, соответственно, а пусть, кроме того, каждая их алгебр $\mathcal{R}_k$ содержит идеал $\mathcal{K}_k$ компактных операторов. Пусть $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2$, тогда $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{R}$ является идеалом всех компактных операторов, действующих в $H_1 \otimes H_2$.

Естественным расширением билокального принципа Пилиди [6] при описании алгебры Калкина $\mathcal{R}/\mathcal{K}$ служит приведенный в работе локальный принцип со следующей специальной системой идеалов $J(1) = \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ и $J(2) = \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{K}_2$, обладающей, очевидно, свойством $J(1) \cap J(2) = \mathcal{K}$. Двумя локальными алгебрами при этом служат $\mathcal{R}(1) = (\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2)/(\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{R}_2) = \mathcal{R}_1/\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{R}_2$ и $\mathcal{R}(2) = (\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2)/(\mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{K}_2) = \mathcal{R}_1 \otimes \mathcal{R}_2/\mathcal{K}_2$. Отметим, что, как правило, при описании $\mathcal{R}(1)$ и $\mathcal{R}(2)$ используется дальнейшая локализация алгебр $\mathcal{R}_1/\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{R}_2/\mathcal{K}_2$.

Пример 7.4. В работе [20] при изучении алгебры двусторонних сверток на группе Гейзенберга был применен локальный принцип со специальным подбором системы идеалов $J_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, обладающей свойством $\cap_{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}} J(\lambda) = \{0\}$.

Настоящая работа была выполнена при частичной поддержки проекта CONACYT 46936, Мексика.

## References


1. *Василевский Н.Л.* Алгебры, порожденные многомерными сингулярными операторами и коэффициентами, допускающими разрывы однородного типа. // Матем. сборник, 1986, т. 129(171), вып. 1, 3-19.
2. *Василевский Н.Л.* Двумерные операторы Михлина-Кальдерона-Зигмунда и бисингулярные операторы. // Сибирский матем. журнал, 1986, т. 27, № 2, 23-31.
3. *Васильев Р.Б.* $C^*$-алгебры с конечномерными неприводимыми представлениями. // Успехи матем. наук, 1966, т. 21, вып. 1(127), 135-154.
4. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца. 1973, 426 с.
5. *Диксмье Ж.* $C^*$-алгебры и их представления. Москва: Наука. 1974, 399 с.
6. *Пилиди В.С.* Локальный метод в теории линейных операторных уравнений типа бисингулярных интегральных уравнений. // Математический анализ и его приложения, Изд. Ростовского ун-та, Ростов на Дону, 1971, т. III, 81-105.
7. *Симоненко И.Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, I. // Изв. АН СССР (сер. матем.), 1965, т. 29, № 3, 567-586.
8. *Симоненко И.Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, II. // Изв. АН СССР (сер. матем.), 1965, т. 29, № 4, 757-782.
9. *Симоненко И.Б.* Уравнения типа свертки в конусах. // Матем. сборник, 1967, т. 74, № 2, 298-313.
10. *Allan G.R.* On one-sided inverses in Banach algebras of holomorphic vector valued functions // J. London Math. Soc., 1967, v. 42, № 3, 463-470.
11. *Allan G.R.* Ideals of vector valued functions. // Proc. London Math. Soc., 1968, v. 18, 193-216.
12. *Dauns J., Hofmann K.H.* Representation of Rings by Sections. Memoirs AMS, v. 83. Providence, Rhode Island: AMS. 1968, 180 p.
13. *Douglas R.G.* Banach Algebra Techniques in Operator Theory. New York: Academic Press, 1972, 216 p.
14. *Douglas R.G.* Banach algebra techniques in the theory of Toeplitz operators. // CBMS Regional Conf. Ser. Math., 1973, no. 15, 53 p.
15. *Dupré M.J.* The classification and structure of $C^*$-algebra bundles. Memoirs AMS, v. 222. Providence, Rhode Island: AMS. 1979, 77 p.
16. *Fell J.M.G.* The structure of algebras of operator fields. // Acta Math., 1961, v. 106, 233-280.
17. *Hofmann K.H.* Representations of algebras by continuous sections // Bull. Amer. Math. Soc., 1972, v. 78, no. 3, 291-373.
18. *Takesaki M., Tomiyama J.* Application of fiber bundles to certain class of $C^*$-algebras. // Tohoku Math. J., ser 2, 1961, v. 13, 498-522.
19. *Varela J.* Duality of $C^*$-algebras. // Memories AMS, v. 148, Providence, Rhode Island: AMS, 1974, 97–108.
20. *Vasilevski N.L.* Convolution operators on standard CR-manifolds. II. Algebras of convolution operators on the Heisenberg group. // Integr. Equat. Oper. Th., 1994, v. 19, 327-348.


**CINVESTAV, Mexico City**

**Дата поступления статьи**

On a general local principle for $C^*$-algebras.
N.L. Vasilevski

УДК 517.98
***Василевский Н.Л.*** Об общем локальном принципе для $C^*$-алгебр // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2005. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики.

В настоящей работе предлагается вариант локального принципа для $C^*$-алгебр, который основан на конструкции Даунса-Хофманна описания алгебр непрерывными сечениями расслоений.
Библиогр. 20.